Тема 3

Элементы выпуклого анализа.

1. Критерии выпуклости и сильной выпуклости.

Определение. *Множество U из линейного пространства $\mathbb{L}$ называется* **выпуклым**, *если выполнено условие*

$$\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U \ \forall u_1, u_2 \in U, \forall \alpha \in [0,1].$$

Это определение можно трактовать следующим образом: отрезок, соединяющий две произвольные точки множества U целиком содержится в этом множестве.

Определение. *Функционал $J(u) : U \to \mathbb{R}^1$ называется* **выпуклым** */ вогнутым / на выпуклом множестве U из линейного пространства $\mathbb{L}$, если выполнено условие*

$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leqslant [\geqslant] \alpha J(u_1) + (1-\alpha)J(u_2) \ \forall u_1, u_2 \in U, \forall \alpha \in [0,1].$$

Определение. *Функционал $J(u) : U \to \mathbb{R}^1$ называется* **строго выпуклым** */ строго вогнутым / на выпуклом множестве U из линейного пространства $\mathbb{L}$, если выполнено условие*

$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) < [>] \alpha J(u_1) + (1-\alpha)J(u_2) \ \forall u_1, u_2 \in U, \forall \alpha \in (0,1).$$

Определение. *Функционал $J(u) : U \to \mathbb{R}^1$ называется* **сильно выпуклым** *на выпуклом множестве U из линейного нормированного пространства $\mathbb{H}$, если существует такое положительное число æ, что выполнено условие*

$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leqslant \alpha J(u_1) + (1-\alpha)J(u_2) - \frac{æ}{2}\alpha(1-\alpha)||u_1 - u_2||^2_{\mathbb{H}} \ \forall u_1, u_2 \in U, \forall \alpha \in [0,1].$$

фикс. $u_1 \neq u_2, \alpha = 1/2$

Максимальное из чисел æ, обеспечивающих выполнение этого условия, называют константой сильной выпуклости функционала $J(u)$.

т.к. мн-во таких æ₀ огр. сверху, то такое $æ_{max}$ ∃, ибо в ↑ нер-ве можно перейти к lim по $\{æ_k\}$ при фикс. α, u_1, u_2. $æ_{sup}$

Замечание. *Если функционал является выпуклым (строго выпуклым) [сильно выпуклым] на каком-то выпуклом множестве, то он является выпуклым (строго выпуклым) [сильно выпуклым] и на любом выпуклом подмножестве этого множества.*

Замечание. *Из сильной выпуклости функционала на некотором множестве вытекает его строгая выпуклость на этом множестве, а из строгой выпуклости вытекает обычная выпуклость.*

Пример: $J(u) = \|u\|^2_H$

H-гильбертово

$J(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) - \lambda J(u_1) - (1-\lambda)J(u_2) = \|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2\|^2_H - \lambda J(u_1) - (1-\lambda)J(u_2) = \langle \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \rangle_H - \lambda \langle u_1, u_1\rangle_H - (1-\lambda)\langle u_2, u_2\rangle_H = (\lambda^2-\lambda)\langle u_1, u_1\rangle_H + (\lambda^2-\lambda)\langle u_2, u_2\rangle_H - 2(\lambda^2-\lambda)\langle u_1, u_2\rangle_H =$

$= (\lambda^2-\lambda)\langle u_1-u_2, u_1-u_2\rangle = -\frac{2}{2}\lambda(1-\lambda)\|u_1-u_2\|^2_H$

т.е. $æ = 2$

на U $J(u)$ непр. дифф.: $J'(u)$ — непрерывен $\forall u\in U \Leftrightarrow \|J'(u+h) - J'(u)\|_H \xrightarrow[\|h\|_H\to 0]{} 0$
градиент $\cong a(u)$; $a(u+h)$, $a(u)$

на U $J(u)$ дважды непр. дифф.: $J''(u)$ — непр. $\forall u\in U \Leftrightarrow \|J''(u+h) - J''(u)\| = \sup\limits_{g\in\mathbb{H},\ g\neq\theta_H} \dfrac{\|(J''(u+h)-J''(u))g\|_H}{\|g\|_H} \xrightarrow[\|h\|_H\to 0]{} 0$
гессиан $\cong B(u)$; $B(u+h)$, $B(u)$, $\mathcal{L}(H\to H)$

Теорема. *(критерии выпуклости)*

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве U из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ функционал $J(u)$ являлся на нем выпуклым (строго выпуклым), необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий:

1. $J(u) \geqslant (>) J(v) + \langle \underbrace{J'(v)}_{a(v)}, u-v\rangle_{\mathbb{H}}\ \forall u,v\in U$,
2. $\langle \underbrace{J'(u)}_{a(u)} - \underbrace{J'(v)}_{a(v)}, u-v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant (>) 0\ \forall u,v\in U$.

иначе (при $\mathrm{int}\, U = \varnothing$) это только Д.У.

Если же функционал $J(u)$ является дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше на выпуклом множестве U <u>с непустой внутренностью</u>! из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, то его выпуклость (строгая выпуклость) на этом множестве эквивалентна выполнению условия $\langle \underbrace{J''(u)}_{B(u)}h,h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant (>) 0\ \forall u\in U, \forall h\in\mathbb{H}$.

Замечание. *По определению первой и второй производной по Фреше, объекты $J'(u)$, $J'(v)$, $J''(u)h$ являются элементами пространства $\mathbb{H}^*$, то есть линейными ограниченными операторами, действующими из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$. В приведенной теореме выражения $J'(u)$, $J'(v)$, $J''(u)h$ трактуются как изоморфные соответствующим объектам элементы гильбертова пространства $\mathbb{H}$.*

Теорема. *(критерии сильной выпуклости)*

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве U из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ функционал $J(u)$ являлся на нем сильно выпуклым, необходимо и достаточно существование такого положительного числа μ, что выполнено одно из двух условий:

1. $J(u) \geqslant J(v) + \langle \underbrace{J'(v)}_{a(v)}, u-v\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\mu}{2}||u-v||^2_{\mathbb{H}}\ \forall u,v\in U$,
2. $\langle \underbrace{J'(u)}_{a(u)} - \underbrace{J'(v)}_{a(v)}, u-v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \mu||u-v||^2_{\mathbb{H}}\ \forall u,v\in U$.

Если же функционал $J(u)$ является дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше на выпуклом множестве U <u>с непустой внутренностью</u>! из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, то его сильная выпуклость на этом множестве эквивалентна существованию такого положительного числа μ, что выполнено условие $\langle J''(u)h,h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \mu||h||^2_{\mathbb{H}}\ \forall u\in U, \forall h\in\mathbb{H}$.

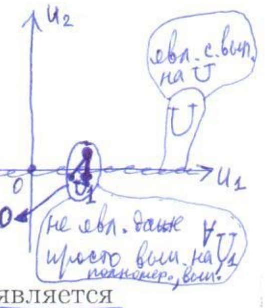
Замечание. *Максимальное из чисел μ, обеспечивающих выполнение условий этой теоремы, равно константе сильной выпуклости функционала $J(u)$.*

Существенность требования непустоты (внутренности) множества U подтверждает простой пример: рассмотрим функционал $J(u) = u_1^2 - u_2^2$ на множестве $U = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\ | u_2 = 0\}$. Ясно, что

$\mathrm{int}\, U = \varnothing$

$$\langle J'(u) - J'(v), u-v\rangle_{\mathbb{R}^2} = \{u = (u_1,0)^T, v = (v_1,0)^T\} = 2(u_1-v_1)^2 \geqslant 2||u-v||^2_{\mathbb{R}^2}\ \forall u,v\in U,$$

то есть $J(u)$ даже сильно выпуклый на множестве U, но



$$J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ \langle J''(u)h,h\rangle_{\mathbb{R}^2} = \{h = (h_1,h_2)^T\} = 2(h_1^2 - h_2^2) \ngeqslant 0$$

при, например, $h = (0,-1)^T$.

$2(u_1-v_1)^2 - 2(u_2-v_2)^2 = \langle J'(u)-J'(v), u-v\rangle = \{u_1 = v_1, u_2 \neq v_2\} < 0$

Выпуклость и сильная выпуклость простейших функционалов:

+1. Линейный функционал $\mathbf{J(u)} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{H}}$, $c\in\mathbb{H}$ является выпуклым, но <u>не является сильно выпуклым</u> на всем гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Для обоснования этого факта

на $\forall$ вып. $U\subset\mathbb{H}$

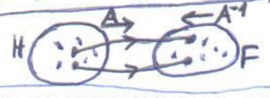
пусть $\exists \overset{\text{лин. огр.}}{A^{-1}}: F \to H \Rightarrow \|u-v\|_H = \|A^{-1}A(u-v)\|_H \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|A(u-v)\|_F \Rightarrow \|A(u-v)\|_F \geqslant \underbrace{\frac{1}{\|A^{-1}\|}}_{\varepsilon>0} \|u-v\|_H \; \forall u,v \in H$ (ч.т.д.)

A^{-1} опр-н на $\operatorname{Im} A \subseteq F$

$\{\|A^{-1}\| \neq 0$, т.к. $A^{-1} \neq O_{\text{нул. опер.}}\}$

пусть $\|A(h_1-h_2)\|_F \geqslant \underset{>0}{\varepsilon}\|h_1-h_2\|_H \; \forall h_1,h_2 \in H \Rightarrow \|Ah_1-Ah_2\|_F \geqslant \varepsilon\|h_1-h_2\|_H > 0 \Rightarrow Ah_1 \neq Ah_2 \Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(F \to H)$ (ч.т.д.)

$\forall h_1 \neq h_2$



обратный к линейному линеен, но м.б. неогр.

см. оборот

заметим, что он непрерывно дифференцируем на всем пространстве $\mathbb{H}$, $J'(u) \cong c \; \forall u \in \mathbb{H}$. Применяя критерии выпуклости и сильной выпуклости, имеем

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle c - c, u - v\rangle_{\mathbb{H}} = 0 \; \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Таким образом, условие $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0$ из критерия выпуклости выполнено, а условие $\langle J'(u)-J'(v), u-v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \mu||u-v||^2_{\mathbb{H}}$ из критерия сильной выпуклости не выполняется ни для одного $\mu > 0$.

+ 2. Квадратичный функционал $\mathbf{J(u) = ||Au - f||^2_{\mathbb{F}}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, $f \in \mathbb{F}$. Он является непрерывно дифференцируемым на всем пространстве $\mathbb{H}$, $J'(u) \cong 2A^*(Au - f) \; \forall u \in \mathbb{H}$, значит

непр. как суперпоз. $2A^*(Au-f)$

см. оборот — A^* — л.о. опер.

$(Au-f)$ — непр.

Au — непр., т.к. A — л.о. опер.

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle 2A^*(Au - f) - 2A^*(Av - f), u - v\rangle_{\mathbb{H}} =$$
$$= \langle 2A^*A(u - v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} = 2\langle A(u - v), A(u - v)\rangle_{\mathbb{F}} = 2||A(u - v)||^2_{\mathbb{F}}.$$

либо так: $J''(u) \cong 2A^*A$ — непр. $\langle J''(u)h, h\rangle_H = 2\|Ah\|^2$

Из этого соотношения вытекает, что рассматриваемый функционал всегда является выпуклым на всем пространстве $\mathbb{H}$. Для того, чтобы он был сильно выпуклым, необходимо и дост. выполнение соотношения $2||A(u - v)||^2_{\mathbb{F}} \geqslant \mu||u - v||^2_{\mathbb{H}}$ при некотором $\mu > 0$, что означает непрерывную обратимость оператора A, то есть существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{F} \to \mathbb{H})$. Т.е.: необх. усл. сильн. вып-ти — $\exists A^{-1}$ лин. опер.; дост. усл. с. в. — $\exists A^{-1}$ — лин. огр. опер.

+ 3. Квадратичный функционал $\mathbf{J(u) = \langle Au, u\rangle_{\mathbb{H}}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H})$. Он также является непрерывно дифференцируемым на всем пространстве $\mathbb{H}$, $J'(u) \cong (A + A^*)u \; \forall u \in \mathbb{H}$. Поступая так же, как и в предыдущем случае, имеем

при этом: "как в пр. 2" н. у. с. в. — $\exists A^{-1}$ — лин. опер., но $\exists A^{-1}$ — лин. огр. опер. не явл. д. у. с. в.: например $A = -E$

либо так: $J''(u) \cong A + A^*$ — непр. $\langle J''(u)h, h\rangle_H = 2\langle Ah, h\rangle_H$

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle (A + A^*)u - (A + A^*)v, u - v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle A(u - v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} +$$
$$+ \langle A^*(u - v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} = 2\langle A(u - v), u - v\rangle_{\mathbb{H}}.$$

для с.в. д.б. $\langle Ah, h\rangle_H \geqslant \underset{>0}{\varepsilon}\|h\|^2_H$

Из этой оценки видно, что для выпуклости этого функционала на всем пространстве $\mathbb{H}$ необходима и достаточна неотрицательная определенность оператора A, а для сильной выпуклости необходима и достаточна ~~положительная определенность~~ оператора A. положительная опр-ть

В заключение приведём важнейший результат, относящийся к сильно выпуклым функционалам.

Теорема. *(теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов)*

Пусть U — замкнутое выпуклое множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, функционал $J(u)$ определён, {слабо} полунепрерывен снизу и является сильно выпуклым с константой сильной выпуклости æ на U. Тогда:

1. $J_* > -\infty$,

$J_* = \inf\limits_{u \in U} J(u)$

2. U_* непусто и состоит из единственного элемента u_*,

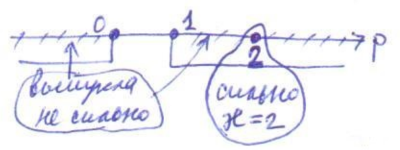
3. Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}^{+\infty}_{n=1}$ **сильно** *сходится к u_*, причём $\frac{æ}{2}||u_n - u_*||^2_{\mathbb{H}} \leqslant J(u_n) - J(u_*)$.*

Задачи:

Замечание: неотрицательная линейная комбинация $(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0)$ двух выпуклых (с. выпуклых с $æ_1, æ_2 > 0$) ф-ций — выпукла (с. выпукла с $æ \geqslant \alpha æ_1 + \beta æ_2$) (см. оборот)

1. Исследовать на выпуклость и сильную выпуклость на указанных множествах (в случае наличия сильной выпуклости указать константу сильной выпуклости) следующие функции конечного числа переменных:

+ $f(x) = x^p \; (p \in \mathbb{R}^1)$, $X = (0, +\infty)$; + $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $X = (0, +\infty)$; + $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $X = (0, +\infty)$;



выпукла, но не сильно

$f''(x) \cong \dfrac{2}{x^3} > 0$

$\langle f''(x)h, h\rangle_{\mathbb{R}^1} = f''(x) \cdot h^2 \geqslant 0 \Rightarrow$ h не влияет $\forall x \in X \; \forall h \in \mathbb{R}^1$

$\langle f''(x)h, h\rangle_{\mathbb{R}^1} \overset{?}{\geqslant} \mu\|h\|^2_{\mathbb{R}^1}$

$f''(x)h^2 \not\geqslant \mu h^2 \quad \forall x \in X \quad \forall h \in \mathbb{R}^1$

$\underbrace{\dfrac{2}{x^3}}_{\to +0 \text{ при } x \to +\infty} \not\geqslant \mu > 0 \; \forall x > 0$

невыпукла

Пусть дан $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, для которого $\exists A^{-1}$.
линейный (не обязат. огр-н) оператор

Утверждение: A^{-1} – линеен для A – линейного оператора

$-27.1-$

$\Rightarrow \forall f \in \operatorname{Im} A \subseteq F \quad f = A(A^{-1}f)$, т.е. $\exists h = A^{-1}f \in H: Ah = f$

опр-е A^{-1}: $\{\forall h \in H \quad h = A^{-1}(Ah)\}$

Теперь для $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$, $\forall f_1, f_2 \in \operatorname{Im} A \subseteq F$ рассм. $A^{-1}(\lambda f_1 + \mu f_2) \overset{\exists h_1, h_2}{=} A^{-1}(\lambda A h_1 + \mu A h_2) = A^{-1}(A(\lambda h_1 + \mu h_2)) = \lambda h_1 + \mu h_2$

т.е. A^{-1} – линеен: $\lambda A^{-1} f_1 + \mu A^{-1} f_2 = \lambda A^{-1}(Ah_1) + \mu A^{-1}(Ah_2) = \lambda h_1 + \mu h_2$

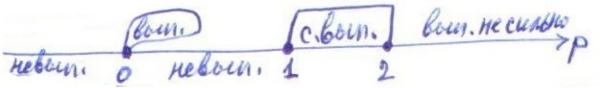
для $f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$: $\quad$! т.е. $\varkappa \geq \alpha\varkappa_1 + \beta\varkappa_2$! а не $=$

Пример: В $\mathbb{R}^2$ $J_1(x,y) = x^2$, $J_2(x,y) = y^2$ – обе вып., не с.в.
$J_1 + J_2$ – с.в. $\varkappa = 2 > 0 + 0$

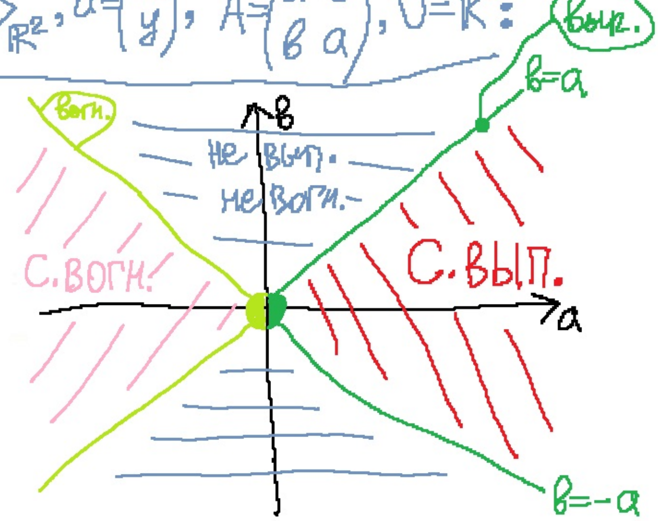
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \alpha f_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \beta f_2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \alpha\lambda f_1(x_1) + \alpha(1-\lambda) f_1(x_2) - \alpha\frac{\varkappa_1}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2 + \beta\lambda f_2(x_1) + \beta(1-\lambda) f_2(x_2) - \beta\frac{\varkappa_2}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2 =$$

$$= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \frac{\alpha\varkappa_1 + \beta\varkappa_2}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2$$ ч.т.д.

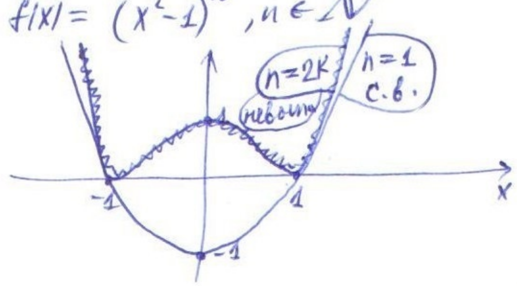
$f(x) = |\ln x|^p$ на $X_1 = (0, 1]$:



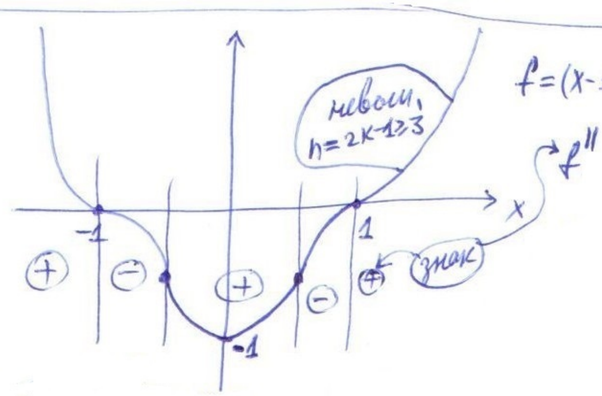
$J(u) = \langle Au, u \rangle_{\mathbb{R}^2}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $U = \mathbb{R}^2$:



$f(x) = (x^2 - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$



$f = (x-1)^{2k-1}(x+1)^{2k-1}$



Утверждение: В евклидовых пр-ах A^* – линеен для A линейного (1)
– ограничен для A ограниченного, причем $\|A^*\| = \|A\|$ (2).

Лемма: если $\langle x, a \rangle_H = \langle x, b \rangle_H$ $\forall x \in H$, то $a = b$
Док-во: $\langle x, a \rangle_H = \langle x, b \rangle_H \Leftrightarrow \langle x, a - b \rangle_H = 0 \mapsto$ при $x = a - b$ ч.т.д.

(1): Пусть $\langle Ax, y \rangle_F = \langle x, A^* y \rangle_H$ $\forall x \in H$, $\forall y \in F$
$\Rightarrow$ Рассм. для $\forall y_1, y_2 \in F$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ – фикс., $\forall x \in H$

$\langle x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle_H = \langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle_F = \alpha \langle Ax, y_1 \rangle_F + \beta \langle Ax, y_2 \rangle_F =$
$= \alpha \langle x, A^* y_1 \rangle_H + \beta \langle x, A^* y_2 \rangle_H = \langle x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2 \rangle_H \overset{\text{лемма}}{\longmapsto}$ ч.т.д.

(2): $\forall y \in F$ $\{y \notin \operatorname{Ker} A^*\}$: $\|A^* y\|_H^2 = |\langle A^* y, A^* y \rangle_H| = |\langle AA^* y, y \rangle_F| \leq \|A\| \cdot \|A^* y\|_H \cdot \|y\|_F \Rightarrow \|A^* y\|_H \leq \|A\| \cdot \|y\|$ $\quad \|A^*\| \leq \|A\|$

для $\forall x \in H$ $\{x \notin \operatorname{Ker} A\}$: $\|Ax\|_F^2 = |\langle Ax, Ax \rangle_F| = |\langle x, A^* Ax \rangle_H| \leq \|x\|_H \cdot \|A^*\| \cdot \|Ax\|_F \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \|A^*\| \cdot \|x\|$ $\quad \|A\| \leq \|A^*\|$

+ 4.* Исследовать на выпуклость (с. вып-ть) в $\mathbb{H}$-гильб. $J(u) = \|u\|_H^p$ {на $\forall U$-вып.}

+ 5.* Иссл-ть на вып-ть (с. вып-ть) в $\mathbb{R}^n$ $f(x) = \ln(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n})$

{вып., не с. вып.} {$1 \le p \le 2$ с. вып. $p = 0 \cup p \ge 1$ вып.}

+ $f(x) = -\ln x, X = (0, +\infty)$; + $f(x) = |\ln x|^p$ $(p \in \mathbb{R}^1)$, + $X_1 = (0, 1], X_2 = [1, +\infty), X_3 = (0, +\infty)$;

+ $f(x) = (x^2 - 1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $X = (-\infty, +\infty)$; $f(x) = (\sin x + 1)^p$ $(p \in \mathbb{R}^1)$, $X = [-\pi, 0]$;

$$J(u) = x^p y^q \ (p, q \in \mathbb{R}^1),\ U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\};$$

{вып. $\forall (a, b)$ с. вып. $a \neq \pm b$} + $J_1(u) = \|Au\|^2_{\mathbb{R}^2}$, + $J_2(u) = \langle Au, u \rangle_{\mathbb{R}^2}$, $u = (x, y)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $U = \mathbb{R}^2$. {вып. $|b| \le a$ с. вып. $|b| < a$}

+ 3. Задан $f(h)$ – сильно выпуклый на $\mathbb{H}$ с $\varkappa_f > 0$ функционал. Расс-ся при (фикс.) $x \neq \theta_H$, $y \in \mathbb{H}$ ф-я $g(t) = f(y + tx)$, $g: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. $f: \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$ гильб. Доказать сильную вып-ть $g(t)$ и найти $\varkappa_g$ – конст. с. в. {$\ge \varkappa_f \|x\|_H^2$}

2. Исследовать на выпуклость и сильную выпуклость на указанных пространствах функционалы

{с. вып.}

$$+\ J(u) = \int_0^1 \rho(t) u^2(t)\, dt,\ \rho(t) \geqslant \rho_0 > 0, \rho(t) \in C[0, 1] \text{ в } L^2(0, 1);$$

{вып.} {вып.} {не вып., не вогн.}

$$+\ J_1(u) = \int_{1/2}^1 u^2(t)\, dt,\ +\ J_2(u) = \int_0^1 \left(\int_0^t u(\tau)\, d\tau \right) dt,\ +\ J_3(u) = \int_0^1 u(t) u(1 - t)\, dt \text{ в } L^2(0, 1);$$

{с. вып.} {вып.} {не вып., не вогн.} {вып.}

$$+\ J_4(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n}} x_n^2,\ +\ J_5(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x_n^2,\ +\ J_6(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot x_{n+1},\ +\ J_7(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_{2n-1} + 2x_{2n})^2 \text{ в } \ell^2.$$